RESUMEN MATEMÁTICA

CUADERNO RESUMEN DE CONTENIDOS - PSU MATEMATICA

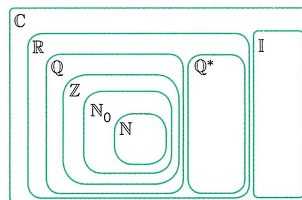




www.moraleja.cl

I. NÚMEROS

1. CONJUNTOS NUMÉRICOS



- **Números Naturales:** $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, ... \}$
- **Números Cardinales:** $\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... \}$
- **Números Enteros:** $\mathbb{Z} = \{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$
- **Números Racionales** $\mathbb{Q}$. Aquellos que se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b} = k$ con a, b números enteros y $b \neq 0$.
  Ejemplos: $\{ 1; 0{,}2; \frac{-4}{3}; 2{,}\overline{31}; ... \}$
- **Números Irracionales** $\mathbb{Q}^*$. Números decimales infinitos NO periódicos. Aquellos números que NO se pueden escribir como fracción. Ejemplos: $\{ \sqrt{2}, \pi, \sqrt[5]{3}, ... \}$
- **Números Reales** $\mathbb{R}$. Unión del conjunto de los racionales y los irracionales. Ejemplos: $\{2, \sqrt{7}, 3\pi, \frac{4}{5}, ... \}$
- **Números Imaginarios** $\mathbb{I}$. Los números imaginarios $\mathbb{I}$, son todos aquellos números de la forma bi, con b número real e i la unidad imaginaria. Ejemplos: $\{ i, 2i, \sqrt{3}i, \frac{2}{3}i, ... \}$
- **Números Complejos** $\mathbb{C}$. Números de la forma $z = a + b \cdot i$, donde a y b reales e i es la unidad imaginaria.
  Ejemplos: $\{1, -i, 3 + 2i, 1 - i, ... \}$

2. NÚMEROS ENTEROS

a. Operatoria en los Enteros

i. Adición y sustracción

Números de igual signo: para adicionar números de igual signo se deben sumar los valores absolutos de ellos conservando el signo común.

Ejemplos: $5 + 7 = 12$; $-5 - 7 = -12$

Números de distinto signo: para adicionar números de distinto signo, al de mayor valor absoluto se le resta el de menor valor absoluto y se conserva el signo del mayor número en valor absoluto.

Ejemplos: $5 - 7 = -2$; $-5 + 7 = 2$

TIPS:
- **Siempre** que a un número mayor le restamos uno menor, el resultado es positivo.
- **Siempre** que a un número menor le restamos uno mayor, el resultado es negativo.

ii. Multiplicación y división

Números de igual signo: para multiplicar o dividir dos números de igual signo, se multiplican los números y el resultado siempre será positivo.

Ejemplos: $5 \cdot 7 = 35$; $(-5) \cdot (-7) = 35$
$10 : 2 = 5$; $(-10) : (-2) = 5$

Números de distinto signo: para multiplicar o dividir dos números de distinto signo, se multiplican los números y el resultado siempre será negativo.

Ejemplos: $5 \cdot (-7) = -35$; $(-5) \cdot 7 = -35$
$10 : (-2) = -5$; $(-10) : 2 = -5$

TIPS: Siempre se cumple que:

- La suma o resta de **dos números pares**, dan como resultado un **número par**.
- La suma o resta de **dos números impares**, dan como resultado un **número par**.
- La suma o resta de **un número par y un impar**, dan como resultado un número **impar**.
- La multiplicación de **dos números pares**, dan como resultado un **número par**.
- La multiplicación de **un número par y un impar**, dan como resultado un número **par**.
- La multiplicación de **dos números impares**, dan como resultado un **número impar**.

iii. Prioridad de las operaciones

Cuando se requiere efectuar varias operaciones en un mismo ejercicio, se debe respetar el siguiente orden de las operaciones: 1° Paréntesis , 2° Potencias y Raíces , 3° Multiplicación y división (de izquierda a derecha), 4° Adición y sustracción.

b. Criterios de divisibilidad

Para determinar de manera rápida los divisores de un número, podemos usar los criterios de divisibilidad. Un número será divisible por:

2 → Si su última cifra es par.

3 → Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

4 → Si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4 o son ceros.

5 → Si termina en cero o 5.

6 → Si es divisible por 2 y 3 a la vez.

7 → Si al multiplicar la cifra de las unidades por 2 y restándola al número formado por las otras cifras, el resultado es un múltiplo de 7 o 0.

8 → Si sus tres últimas cifras forman un múltiplo de 8 o son ceros.

9 → Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

10 → Si su última cifra es cero.

c. Números Primos y Compuestos

Números Primos: Enteros positivos que solo son divisibles por uno y por si mismos: { 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , ... }

Números Compuestos: Enteros positivos mayores que uno que no son primos: { 4 , 6 , 8 , 9 , 10 , 12 , ... }

El teorema fundamental establece que todo número compuesto se puede expresar de manera única como el producto de factores primos.

TIPS:
- El menor número primo es el 2, el que además es el único número primo que es par.
- El 1, no es primo ni compuesto.
- El 0, es un número par. Este no es positivo, ni negativo.

d. Mínimo común múltiplo (m.c.m) y máximo común divisor (M.C.D)

i. Mínimo común múltiplo (m.c.m)

El mínimo común múltiplo (m.c.m), es el menor entero positivo que es múltiplo común de dos o más enteros.

- Métodos para hallar el m.c.m:

a. Tabla de descomposición:

Ejemplo:

Sean A = 90 y B = 24, determinar el m.c.m

24	90	: 2
12	45	: 2
6	45	: 2
3	45	: 3
1 //	15	: 3
	5	: 5
	1 //	
	m.c.m =	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\therefore$ el m.c.m entre 90 y 24 es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

b. Descomposición prima:

Ejemplo:

Sean A = 90 y B = 24, determinar el m.c.m

$A = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $B = 2^3 \cdot 3$

$\therefore$ el m.c.m entre 90 y 24 es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

ii. Máximo común divisor (M.C.D)

El **máximo común divisor** (M.C.D), es el mayor entero positivo que es divisor común de dos o más enteros.

▹ Métodos para hallar el M.C.D:

a. Tabla de descomposición.

Ejemplo:

Sean A = 90 y B = 24, determinar el M.C.D

24	90	: 2
12	45	: 3
4	15	
	M.C.D =	2·3

∴ el M.C.D entre 90 y 24 es 2·3

b. Descomposición prima.

Ejemplo:

Sean A = 90 y B = 24, determinar el M.C.D

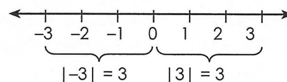
$A = 2\cdot 3^2\cdot 5$ y $B = 2^3\cdot 3$

∴ el M.C.D entre 90 y 24 es 2·3

TIPS: Los números que no tienen factores primos comunes se denominan **primos relativos entre sí.** En tal caso se cumple que el m.c.m es el producto de los números y el M.C.D es 1. Por ejemplo, 9 y 10 son primos relativos entre si, ya que los factores primos de 9 son {3 , 3}, y los factores primos de 10 son {2 , 5}. Por tanto: el m.c.m entre 9 y 10 es 90 , el M.C.D entre 9 y 10 es 1.

e. Valor Absoluto

El valor absoluto de un número x se escribe $|x|$, este resultado corresponde a la distancia que existe entre el número x y el 0, por lo tanto, el valor de $|x|$ es siempre mayor o igual a 0. Matemáticamente, esto último es: $|x|\geq 0$.



$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } & x \geq 0 \\ -x, \text{ si } & x < 0 \end{cases}$$

i. Propiedades del valor absoluto

El valor absoluto cumple las siguientes propiedades:

1. Multiplicación:

$$|a|\cdot|b| = |a\cdot b|$$

2. División:

$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$$

3. Potencia:

$$|a^n| = |a|^n$$

3. NÚMEROS RACIONALES

a. Operatoria en $\mathbb{Q}$

Sean a, b, c y d números enteros distintos de cero, se cumple:

Adición y sustracción:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d \pm b\cdot c}{b\cdot d}$$

Multiplicación:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

División:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Recíproco de $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

b. Operatoria con decimales

i. Adición y sustracción

Para sumar o restar números decimales se ubican las cantidades enteras bajo las enteras, las comas bajo las comas, la parte decimal bajo la decimal y a continuación se realiza la operatoria respectiva.

Ejemplo:

0,247 + 21,65 =

$$\begin{array}{r} 0,247 \\ +21,65 \\ \hline 21,897 \end{array}$$

ii. Multiplicación

Para multiplicar dos o más números decimales, se multiplican como si fueran números enteros, y luego se ubica la coma en el resultado final, de manera tal que el resultado tenga la misma cantidad de cifras decimales que los números del ejercicio en conjunto.

Ejemplo:

1,24 · 0,002 =

Multiplicar 124 · 2 = 248

Ubicar la coma manteniendo cinco cifras decimales: 0,00248

iii. División

Para dividir números decimales, se puede transformar el dividendo y el divisor en números enteros amplificando por una potencia en base 10.

Ejemplo:

2,25 : 0,5 = (Amplificado por 100)

→ 225 : 50 = 4,5

c. Transformación entre decimales y fracciones

i. De decimales finitos a fracciones

Paso 1: En el numerador se escribe el número completo sin la coma.

Paso 2: En el denominador un 1 acompañado de tantos ceros como dígitos existan en la parte decimal.

Ejemplo:

$3,42 = \frac{342}{100}$

ii. De decimales periódicos a fracciones

Paso 1: En el numerador se escribe el número completo sin la coma y se le resta la parte no periódica.

Paso 2: En el denominador tantos nueve como dígitos posea el período.

Ejemplo:

$1,\overline{45} = \frac{145-1}{99}$

iii. De decimales semi-periódicos a fracciones

Paso 1: En el numerador se escribe el número completo sin la coma y se le resta la parte no periódica.

Paso 2: En el denominador se escribe tantos nueve como dígitos posea el período, seguidos de tantos ceros como dígitos tenga el ante–período.

Ejemplo:

$2,4\overline{21} = \frac{2421-24}{990}$

d. Relación de orden en los racionales

Para hallar la relación de orden entre números racionales, se puede utilizar alguno de los siguientes métodos:

i. Multiplicación cruzada

ii. Igualar numeradores

iii. Igualar denominadores

iv. Convertir a número decimal

▹ Recordar que los dígitos decimales de acuerdo a su posición reciben los siguiente nombres:

UM C D U , d c m dm

UM: Unidad de Mil; C: Centena; D: Decena; U: Unidad; d: décima; c: centésima; m: milésima; dm: diez milésima

e. Aproximaciones – Tipos

- Redondeo

  Paso 1: Identificar la posición a la que se quiere redondear.

  Paso 2: Considerar la cifra decimal inmediatamente siguiente a la que determine la aproximación.

  Paso 3: Si dicha cifra es menor que 5, no hay modificaciones en las cifras que se conservan. Si dicha cifra es mayor o igual que 5, la cifra por aproximar se debe aumentar en una unidad.

Ejemplo:
Redondear a la centésima los números 3,1421 y 1,8671
→ 3,14 y 1,87.

- Truncamiento

  Paso 1: Identificar la posición a la que se quiere truncar.

  Paso 2: Considerar las cifras decimales hasta la posición que se determinó.

Ejemplo:
Truncar a la centésima los números 3,1421 y 1,8671
→ 3,14 y 1,86.

- Aproximación por defecto

  Paso 1: Identificar la posición a la que se quiere aproximar.

  Paso 2: Considerar las cifras decimales hasta la posición que se determinó.

Ejemplo:
Aproximar por defecto a la décima el número 3,47 → 3,4

- Aproximación por exceso

  Paso 1: Identificar la posición a la que se quiere aproximar.

  Paso 2: La cifra por aproximar se debe aumentar en una unidad.

Ejemplo:
Aproximar por exceso a la unidad el número 15,28 → 16

4. NÚMEROS REALES

a. Operaciones en los Números Reales

- La **operación entre racionales** da como resultado un **número raciona**l, exceptuandose la división por cero.
- La **operación entre un racional y un irracional** da como resultado un **número irracional**, exceptuandose la multiplicación y la división por cero.
- La **operación entre números irracionales** no siempre resuresulta número irracional.

5. POTENCIAS

a. Propiedades

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
- $a^m : b^m = (a : b)^m$
- $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ó $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, con $a, b \neq 0$
- $a^0 = 1$
- $0^n = 0$, si $n > 0$
- $1^n = 1$
- 0^0 no está definido

b. Ecuación Exponencial

Ecuación exponencial es aquella que tiene la incógnita en el exponente. Para resolver una ecuación exponencial se debe tratar de igualar las bases, aplicando las propiedades correspondientes. Las bases deben ser distintas de cero, uno y menos uno.

Ejemplo: $2^{3x-1} = 2^{x+2} \longrightarrow (3x-1) = (x+2)$

Luego, se deben igualar los exponentes y resolver la ecuación resultante.

6. RAÍCES

a. Propiedades

Las siguientes propiedades se cumplen, sí y solo sí, a y b $\in \mathbb{R}^+$; m y n $\in \mathbb{Z}^+$.

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$; $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $\sqrt[n]{(a)^m} = \sqrt[n \cdot k]{(a)^{m \cdot k}}$
- $\sqrt[n]{(a)} \cdot \sqrt[m]{(b)} = \sqrt[n \cdot m]{(a)^m \cdot (b)^n}$
- $b \cdot \sqrt[n]{(a)} = \sqrt[n]{(a) \cdot b^n}$
- $\sqrt[n]{(a)^m} = (a)^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt{(a)^2} = |a|$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

b. Racionalización

i. Caso 1: Raíz cuadrada:

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} \longrightarrow \frac{a}{b\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b}$$

ii. Caso 2: Binomio con raíces cuadradas:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \longrightarrow \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right) = \frac{a \cdot (\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

iii. Caso 3: Raíz no cuadrada:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \longrightarrow \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

c. Ecuación Irracional

Ecuación irracional es aquella que tiene la incógnita en el sub–radical de una raíz. Ejemplo: $\sqrt{(x+1)} = 5$
Es importante que el(los) valor(es) encontrado(s) sea comprobado en la ecuación original.

7. PRODUCTOS NOTABLES

- **Cuadrado de binomio:**

  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- **Suma por diferencia:**

  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

- **Binomios con termino común:**

  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b) \cdot x + a \cdot b$

- **Cubo de binomio:**

  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

- **Suma y resta de cubos perfectos:**

  $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

  $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a - b^3$

- **Cuadrado de un trinomio:**

  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

8. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Una ecuación se denomina de **primer grado** o **lineal** si el mayor exponente de la incógnita es 1.

a. Ecuaciones Literales

Son ecuaciones que, además de la incógnita, contienen otras letras que representar variables. Para resolverlas, se debe identificar la letra que representa la incógnita y despejarla.

b. Ecuaciones valor absoluto

Las ecuaciones con valor absoluto que estudiaremos, se pueden reducir a la forma: $|x| = a$.

Para resolverlas, debemos plantear dos ecuaciones lineales a partir de la ecuación original, siguiendo el esquema:

$$|x| = a$$
$$\oplus\swarrow \quad \searrow\ominus$$
$$x = a \qquad -(x) = a$$

Como vemos, obtenemos dos ecuaciones lineales, que debemos resolver por separado para obtener las soluciones de la ecuación original.

Ejemplo:

$$|x+4| = 12$$
$$\oplus\swarrow \qquad \searrow\ominus$$
$$x+4 = 12 \qquad -(x+4) = 12$$
$$x_1 = 8 \qquad -x-4 = 12$$
$$-x = 16$$
$$x_2 = -16$$

9. SISTEMAS DE ECUACIONES

Dos ecuaciones de primer grado, que tienen ambas las mismas dos incógnitas, constituyen un sistema de ecuaciones lineales. La forma general de un sistema de ecuaciones de primer grado es: $\begin{array}{l|} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}$, donde a, b, c, d, e y f son números reales.

a. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

i. Método de Sustitución

Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones y luego reemplazarla en la otra ecuación, generándose así una ecuación con una incógnita.

ii. Método de Igualación

Se debe despejar la misma variable en ambas ecuaciones y luego éstos resultados se igualan, generándose así una ecuación con una incógnita.

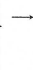
iii. Método de Reducción

Se deben igualar los coeficientes numéricos de una de las incógnitas, en ambas ecuaciones, multiplicando ambos miembros convenientemente, obteniéndose un sistema equivalente al dado, y luego se suman o restan ambas ecuaciones, resultando así una ecuación con una incógnita.

b. Análisis rápido de sistemas de ecuaciones

Dado el sistema

$\begin{array}{l|} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}$



Si: $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$
Entonces el sistema tiene **una solución.**

Si: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$
Entonces el sistema **no tiene solución.**

Si: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$
Entonces el sistema **infinitas soluciones.**

10. DESIGUALDADES

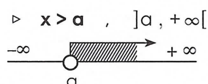
Si a, b, c son números reales, las desigualdades cumplen las siguientes propiedades:

- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$
- Si $0 < a < b$ ó $a < b < 0$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- Si $a < 0 < b$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- Sí, $0 < a < b$ y n un número natural, entonces $a^n < b^n$
- Sí, $a < b < 0$ y n un número natural, entonces $a^{2n} > b^{2n}$
- Sí, $a < b < 0$ y n un número natural, entonces $a^{2n+1} < b^{2n+1}$

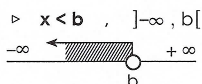
a. Intervalos

Un intervalo real es una porción de la recta numérica definida por desigualdad. Por ejemplo:

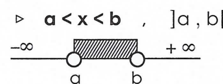
- **x > a** , $]a, +\infty[$



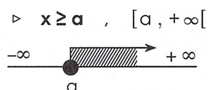
- **x < b** , $]-\infty, b[$



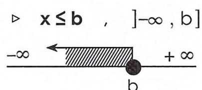
- **a < x < b** , $]a, b[$



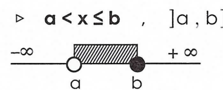
- **x ≥ a** , $[a, +\infty[$



- **x ≤ b** , $]-\infty, b]$



- **a < x ≤ b** , $]a, b]$



11. INECUACIONES

a. Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Son desigualdades que se pueden reducir a una de las formas siguientes:

$$ax + b \geq 0 \quad ; \quad ax + b \leq 0 \quad ; \quad ax + b > 0 \quad ; \quad ax + b < 0$$

Para resolverlas se debe despejar la incógnita x, teniendo en cuanta las propiedades de las desigualdades.

NOTAS: Si al despejar la incógnita en una ecuación esta desaparece y queda:

- Una desigualdad VERDADERA, la solución será $\mathbb{R}$. Ejemplo: $0 \geq -5$
- Una desigualdad FALSA, la solución será $\varnothing$. Ejemplo: $3 < 1$

b. Inecuaciones de segundo grado

Cuando tenemos una desigualdad expresada de la forma: $ax^2 + bx + c \leq 0$ o $ax^2 + bx + c \geq 0$. El proceso de resolución es:

1ro. Se debe dejar cero a un lado de la igualdad.

2do. Factorizar la expresión.

3ro. Encontrar los puntos críticos de la ecuación (valores que hacen cero cada factor).

4to. Construir una tabla con factores y puntos críticos entre $-\infty$ y $+\infty$, formando rangos.

5to. Reemplazar para cada factor un valor de cada rango y analizar si signo (+ ó –).

6to. Analizar para cada rango, si el producto de los factores será + ó – .

7to. Construir el conjunto solución con los intervalos que cumplen con la condición inicial **> 0** ó **< 0**.

- Este mismo proceso se aplica también cuando queremos resolver inecuaciones fraccionarias.

12. LOGARITMOS

Definición: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$. Además se debe cumplir que: $b > 0$; $a \neq 1$; $a > 0$.

a. Propiedades

- $\log_{10} a = \log a$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_e x = \ln x$
- $\log_a a^m = m$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a m \cdot n = \log_a m + \log_a n$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

b. Relación de orden de logaritmos

Sean los argumentos, **a, b** números reales positivos y las bases **n, m** números reales positivos distintos de 1. Para ordenar logaritmos podemos utilizar alguno de los siguientes métodos, según sea el caso.

i. Caso 1. Bases iguales

Para ordenar logaritmos de igual base, basta comparar los argumentos.

- Si, $n > 1$ y $a < b$, entonces $\log_n a < \log_n b$
- Si, $0 < n < 1$ y $a < b$, entonces $\log_n a > \log_n b$

ii. Caso 2: Distintas bases y distintos argumentos

En caso que tanto los argumentos como las bases sean distintas, una posibilidad seria cambiar las expresiones hasta llegar a alguna con base común, aplicando propiedades.

c. Ecuación Logarítmica

Ecuación logarítmica es aquella que tiene la incógnita en el argumento de un logaritmo. Para resolver, se deben igualar los argumentos y luego, resolver la ecuación resultante.

Ejemplo: $\log(3x - 1) = \log(x + 2) \longrightarrow (3x - 1) = (x + 2)$. Es importante que el(los) valor(es) encontrado(s) sea comprobado en la ecuación original.

d. Ecuación exponencial de distinta base

Cuando tenemos una ecuación exponencial en la que no es posible igualar bases, aplicamos logaritmos, esto lo hacemos ya que una de las propiedades del logaritmo permite llevar el término que está en el exponente del anti-logaritmo al numerador.

Ejemplo: $2^{3x-1} = 3^{x+2} \longrightarrow \log 2^{3x-1} = \log 3^{x+2} \longrightarrow (3x-1)\cdot\log 2 = (x+2)\cdot\log 3 \longrightarrow$ Despejar x

13. NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo es de la forma ($z = a + b\cdot i$), donde: **a:** es la parte real del complejo y se escribe como Re (z) ; **b:** es la parte imaginaria del complejo y se escribe como Im (z).

a. Unidad imaginaria

Unidad imaginaria, "**i**" y cuyo cuadrado es –1. Es decir, $\sqrt{-1} = i$.

Potencias de i:

En una secuencia de potencias, se cumple: $i^{4n+p} = i^p$, con $n \in \mathbb{R}_0^+$ y $0 \leq p \leq 4$

TIPS:
- $i^0 = 1$
- La suma de cuatro potencias consecutivas de i es 0
- El producto de cuatro potencias consecutivas de i es –1

b. Conjugado de un complejo

Sea el complejo $z = a + bi$, su conjugado es $\bar{z} = a - bi$

c. Representación

Existen diversas formas de representar números complejos. Éstas son:

- Forma binomial: **a + bi**
- Par ordenado: **a + bi** → Par ordenado: (a , b)
- Vector: Cuyo punto de inicio es el origen y su punto de llegada corresponde al par ordenado.

d. Adición y sustracción de complejos

Para sumar o restar dos números complejos, operamos las respectivas partes reales y partes imaginarias entre sí:

Esto es: $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

Entonces las suma: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\cdot i$

Entonces la resta: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\cdot i$

NOTAS:
- El neutro aditivo de un complejo es (0 , 0) = 0 + 0i
- El inverso aditivo de un complejo $z = a + bi$, es $-z = -a - bi$

e. Módulo o Valor absoluto de un complejo

Si $z = a + bi$, entonces el módulo de z es $|z|$, tal que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

NOTA:
- El módulo de un complejo z, también se puede expresar como $\|z\|$.

Propiedades del valor absoluto

El módulo cumple las siguientes propiedades:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad |z^n| = |z|^n$$

f. Multiplicación de complejos

Para multiplicar 2 números complejos se debe hacer de la misma forma en que se multiplicaban dos binomios. Luego se debe reducir.

g. Inverso multiplicativo de un complejo

Sea $z = a + bi$, entonces el recíproco o inverso multiplicativo de z es :

$z^{-1} = \frac{1}{z}$ o $z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$.

Es importante que los términos con "i" no queden en el denominador. De ser así, se debe "racionalizar".

Para racionalizar un complejo, debe amplificarse por el conjugado del denominador y luego reducir:

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi}$$

$$= \frac{a - bi}{a^2 - (bi)^2}$$

$$= \frac{a - bi}{a^2 - b^2 i^2}$$

$$= \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

h. División de complejos

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, con z_2 distinto de cero, la división entre ellos se expresa: $\frac{z_1}{z_2}$. Como se explica anteriormente, debemos racionalizar nuestro resultado.

Ejemplo: Si $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 4 - i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{8+2i+12i+3i^2}{16-i^2} = \frac{8+14i+3i^2}{16-i^2} = \frac{8+14i-3}{16+1} = \frac{5+14i}{17} \text{ ó } \frac{5}{17}+\frac{14}{17}i$$

reemplazamos i^2 por -1 →

14. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado es aquella de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c coeficientes reales y $a \neq 0$. Todas poseen dos soluciones, ya sea en el conjunto de los números reales o en el de los complejos.

a. Métodos resolución

i. Factorizar

Se debe factorizar la expresión como $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Las soluciones de la ecuación serán x_1 y x_2.

Ejemplos:

Resolver: $x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0$ ó $(x-2) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 2$

Resolver: $x^2 - 4 = 0$

$(x+2)(x-2) = 0$

$(x+2) = 0$ ó $(x-2) = 0$

$x_1 = -2$; $x_2 = 2$

Resolver: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$(x-2) = 0$ ó $(x-3) = 0$

$x_1 = 2$; $x_2 = 3$

ii. Completando cuadrados

Se debe reescribir la ecuación de segundo grado de modo que quede escrita de la forma:

$$(x-h)^2 + k = 0$$

Luego despejar x

$$x = k \pm \sqrt{h}$$

NOTA:

- En el ejemplo debemos sumar 9 para poder formar el cuadrado de binomio: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ y debemos restar 9 para no alterar el ejercicio.

Ejemplo:

Resolver: $x^2 + 6x + 5 = 0$

$x^2 + 6x + 5 = 0$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 5 = 0$

$x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 = 0$

$(x+3)^2 - 4 = 0$

$(x+3)^2 = 4 \;/\sqrt{\ }$

$(x+3) = \pm 2$

$x = -3 \pm 2$

$\therefore x_1 = -1$; $x_2 = -5$

iii. Fórmula general

Este método requiere simplemente que se reemplacen los valores de a, b y c en la fórmula para hallar la solución.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se recomienda utilizar solo cuando no es posible factorizar o completar el cuadrado.

Ejemplo:

Resolver: $3x^2 - x - 2 = 0$

$a = 3$, $b = -1$, $c = -2$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{6} = 1 \qquad x_2 = \frac{1-5}{6} = \frac{-2}{3}$$

b. Propiedades de las soluciones

Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, entonces siempre se cumplen las siguientes propiedades:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

c. Análisis de las soluciones utilizando el discriminante

El discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac$. El signo del discriminante determina la naturaleza de las soluciones:

- Si $\Delta > 0$, entonces las soluciones son números **Reales y distintos**
- Si $\Delta = 0$, entonces las soluciones son números **Reales e iguales**
- Si $\Delta < 0$, entonces las soluciones son números **Complejos y distintos**

15. CONCEPTOS BÁSICOS DE FUNCIONES

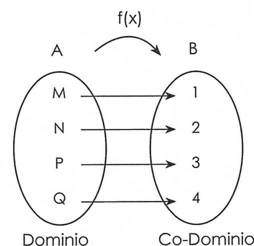
Sea f: A ⟶ B.

Cada elemento del dominio recibe el nombre de **pre–imagen**.

A cada elemento del recorrido se le llama **imagen**.

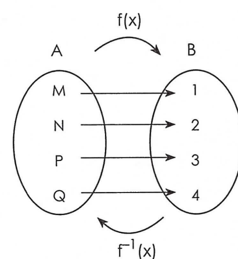
En el diagrama sagital adjunto, para que la función exista, se debe cumplir que cada elemento del conjunto "A", esté asociado a solo un elemento en el conjunto de llegada "B".

Una imagen, puede estar asociada a más de una pre-imagen. Pero una pre-imagen puede estar asociada solo a una imagen.



a. Función inversa

Sea f: A ⟶ B. La función inversa f^{-1} es una función que tiene como pre-imágenes a las imágenes de f, y tiene como imágenes a las pre-imágenes de f. De esta manera se tiene: f^{-1}: B ⟶ A.



Para determinar la expresión algebraica de la función inversa:

Paso 1: se reemplaza f(x) por y.

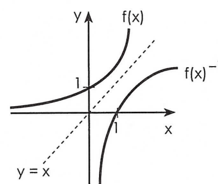
Paso 2: se despeja la variable x de la expresión.

Paso 3: se intercambia la variable x por la y.

Paso 4: la nueva y, se reemplaza por $f^{-1}(x)$

Los puntos (x , y) e (y , x), son simétricos con respecto a la recta y = x, por tanto, las gráficas de f y f^{-1} serán simétricas con respecto a la recta y = x como se muestra en el ejemplo.

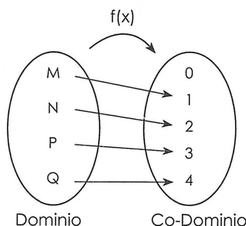
Ejemplo:

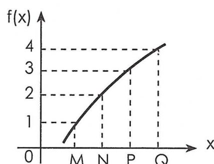


b. Clasificación de funciones

i. Función Inyectiva

Una función es **inyectiva**, si a distintos valores del dominio, le corresponden distintos valores en el co-dominio.

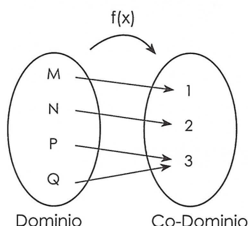


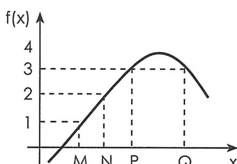


» Gráficamente, para ver si una función es inyectiva, podemos dibujar paralelas al eje x. Estas deben cortar **A LO MÁS en un punto** a la función.

ii. Función Sobreyectiva

Una función es **sobreyectiva** o **epiyectiva** si **cada** valor de recorrido se asocia con al menos un valor del dominio. Es decir, el recorrido coincoi-de con el co-dominio.

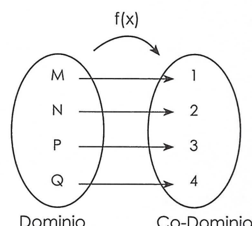


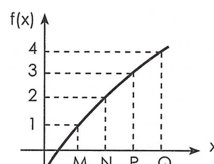


» Gráficamente, para ver si una función es epiyectiva, podemos dibujar paralelas al eje x. Estas deben cortar **AL MENOS en un punto** a la función.

iii. Función Biyectiva

Una función es **biyectiva** cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

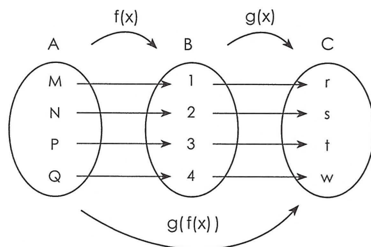




» Gráficamente, para ver si una función es inyectiva, podemos dibujar paralelas al eje x. Estas deben cortar **SIEMPRE en un punto** a la función.

c. Composición de funciones

Sea $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$, podemos hallar una función $g(f(x))$, que vaya de $A \longrightarrow C$. Tal como lo muestra la figura.



Ejemplo:

Sea f y g funciones reales definidas por: $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = 4 - 5x$. Hallar $g(f(x))$:

$$g(f(x)) = 4 - 5(2x - 3)$$
$$= 4 - 10x + 15$$
$$= -10x + 19$$

$$\therefore g(f(x)) = -10x + 19$$

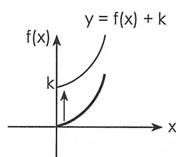
d. Traslación de funciones

Sea y = f(x) una función. Sean h y k números positivos son positivos, entonces se cumple:

i. Desplazamiento vertical

$y = f(x) + k$, es la función f(x) desplazada k unidades en el eje y.

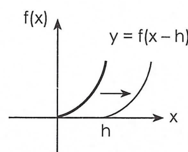
- Si **k > 0** el desplazamiento es en hacia arriba
- Si **k < 0** el desplazamiento es hacia abajo



ii. Desplazamiento horizontal

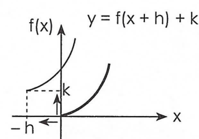
$y = f(x - h)$, es la función f(x) desplazada h unidades en el eje x.

- Si **h > 0** el desplazamiento es a la derecha
- Si **h < 0** el desplazamiento es a la izquierda



iii. Desplazamiento compuesto

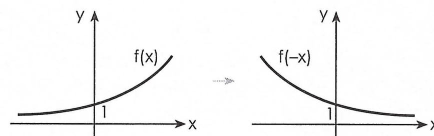
$y = f(x - h) + k$ es la función f(x) desplazada k unidades en el eje y h unidades en el eje x.



e. Reflexión de funciones

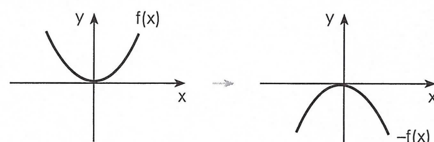
- Reflexión con respecto al eje y

  Si en una función f(x), sustituimos (x) por (–x), la gráfica de f(–x) es el reflejo la primera en torno al eje y.



- Reflexión con respecto al eje x

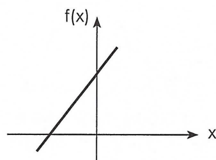
  Si a una función f(x), ante-ponemos un signo menos, "–f(x)" , la gráfica de –f(x) es el reflejo la primera en torno al eje x.



16. FUNCIÓN AFÍN Y LINEAL

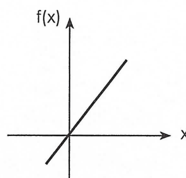
- Función afín

Una función afín es de la forma: $f(x) = mx + n$, con $m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$.



- Función lineal

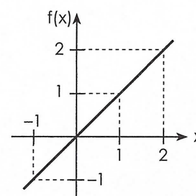
Una función lineal es de la forma: $f(x) = mx$, con $m, \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$.



» La función lineal expresa una proporcionalidad directa entre las variables x y f(x).

- Función identidad

La función identidad es $f(x) = x$



17. FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sea a, b, c ∈ R y $a \neq 0$, se denomina función cuadrática, a una función de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

a. Concavidad

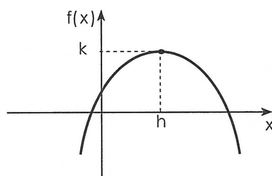
Concavidad es la abertura que tiene la parábola. De acuerdo al valor que toma a, se dan los siguientes casos:

- Si $a > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba ⋃
- Si $a < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo ⋂

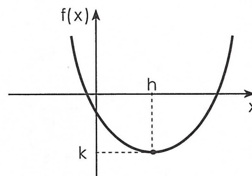
b. Dominio y recorrido

El dominio de una función cuadrática es el conjunto $\mathbb{R}$. El recorrido depende de la concavidad de la parábola.

Si $a < 0$ → Rec: $]-\infty, k]$

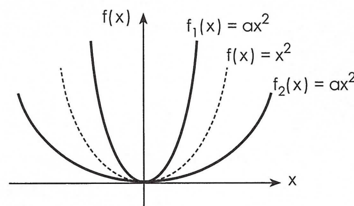


Si $a < 0$ → Rec: $[k, +\infty[$



c. Apertura

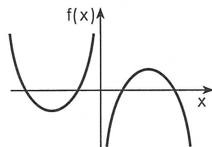
- Si, $|a| > 1$, la gráfica de $f_1(x) = ax^2$ es más cerrada en torno al eje de simetría que la gráfica de $f(x) = x^2$.
- Si, $0 < |a| < 1$, la gráfica de $f_2(x) = ax^2$ es más abierta en torno al eje de simetría que la gráfica de $f(x) = x^2$.



d. Uso del discriminante

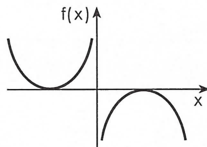
Recordemos del capítulo de ecuaciones de segundo grado, que el discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependiendo de su signo, podíamos conocer la naturaleza de las soluciones.

En funciones lo utilizaremos para conocer si la función corta o no al eje de las abscisas.



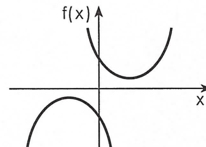
$\Delta > 0$

La parábola intersecta en **dos puntos** al eje x



$\Delta = 0$

La parábola intersecta en **un punto** al eje x.
También se dice que el eje x es tangente a la parábola.



$\Delta < 0$

La parábola **NO intersecta** al eje x

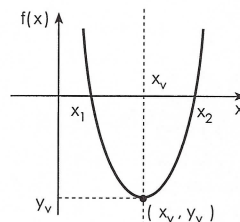
e. Intersección con los ejes

La parábola **siempre** intersecta al eje de las ordenadas y lo hace en el punto $(0, c)$.

La parábola intersecta al eje de las abscisas en x_1 y x_2, que corresponden a las soluciones de una ecuación de segundo grado, donde se iguala $f(x) = 0$. Las coordenadas de intersección con el eje x son: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$

f. Eje de simetría y vértice

Sea la ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, cuyas soluciones son x_1 y x_2.



El **eje de simetría** de la parábola es una recta que divide a esta curva en dos partes congruentes. Para determinar el eje de simetría podemos hacerlo de alguna de estas dos maneras:

$$X_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ó \quad X_V = \frac{-b}{2a}$$

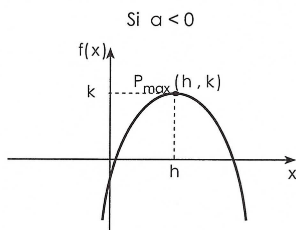
El **vértice de la parábola** es el punto de intersección de ésta con su eje de simetría. El vértice se puede determinar de tres maneras:

$$V = (X_V, f(X_V)) \qquad V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \rightarrow V = (h, k)$$

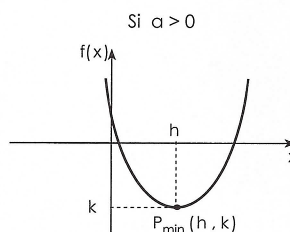
g. Máximo y mínimo

Si $a < 0$



En este caso, la función alcanza un valor máximo (k), cuando la variable independiente toma el valor de h.

Si $a > 0$



En este caso, la función alcanza un valor mínimo (k), cuando la variable independiente toma el valor de h.

h. Desplazamientos

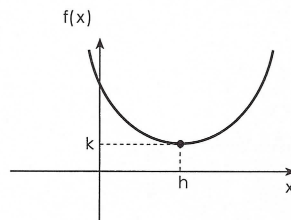
Si la función está escrita de la forma:

$$\mathbf{f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k}$$

La parábola se traslada h unidades en el eje x y k unidades en el eje y, obteniéndose el nuevo vértice de coordenadas (h, k). Estos desplazamientos son respecto a una parábola con vértice en el origen.

Si la función está escrita de la forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + c}$, su desplazamiento solo será vertical de acuerdo al valor de c.

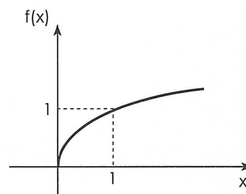
- Si, $c > 0$, se desplaza c unidades hacia arriba.
- Si, $c < 0$, se desplaza c unidades hacia abajo.



18. FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

Sea "x" es un número real no negativo, se define la función raíz cuadrada de "x" por: $f(x) = \sqrt{x}$.

Representación gráfica



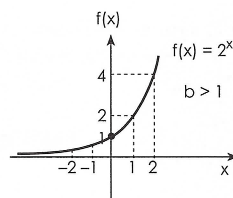
Propiedades

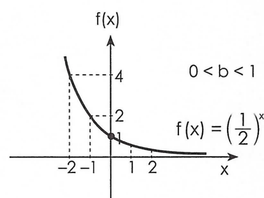
- Dom: $\mathbb{R}_0^+$; Rec: $\mathbb{R}_0^+$
- La gráfica intersecta a los ejes en el origen (0 , 0).
- La función es creciente.
- De manera más general, la representación canónica de la función raíz cuadrada es: $f(x) = a \cdot \sqrt{\pm(x-h)} + k$, con $a > 0$.

19. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Sea "x" es un número real, se define la función exponencial de "x" por: $f(x) = b^x$, con $b \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq 1$

Representación gráfica





Propiedades

- Dom: $\mathbb{R}$; Rec: $\mathbb{R}^+$
- La gráfica intersecta al eje de las y en el punto (0 , 1).
- La gráfica no corta al eje x
- Si $b > 1$, entonces $f(x) = b^x$, es creciente
- Si $0 < b < 1$, entonces $f(x) = b^x$, es decreciente

a. Aplicaciones de la función exponencial

- Interés compuesto

  La formula de interés compuesto es: $C_f = C_i \cdot (1+r)^n$, donde:

  C_f : Capital final
  C_i : Capital inicial
  r : Tasa de interes
  n : N° de periodos

- Crecimiento exponencial

  La fórmula de crecimiento exponencial es: $C_f = C_i \cdot (TC)^n$, donde:

  C_f : Capital final
  C_i : Capital inicial
  TC : Tasa de crecimiento
  n : N° de periodos



20. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

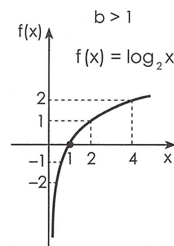
Sea "x" es un número real no negativo, se define la función logarítmica de "x" por:

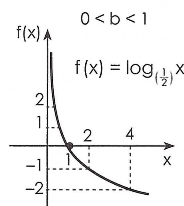
$$f(x) = \log_b x \text{ , con } b \in \mathbb{R}^+ \text{ y } b \neq 1$$

Propiedades

- Dom: $\mathbb{R}^+$; Rec: $\mathbb{R}$
- La gráfica intersecta al eje y en el punto (1 , 0).
- La gráfica no corta al eje x.
- Si $b > 1$, entonces $f(x) = \log_b x$, es creciente
- Si $0 < b < 1$, entonces $f(x) = \log_b x$, es decreciente
- De manera más general, la representación canónica de la función exponencial es: $f(x) = a \cdot \log_b (x - h) + k$

Representación gráfica

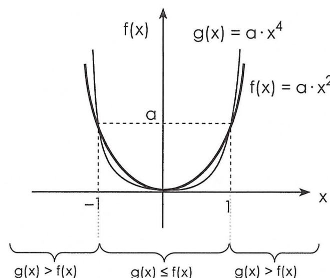




21. FUNCIÓN POTENCIA

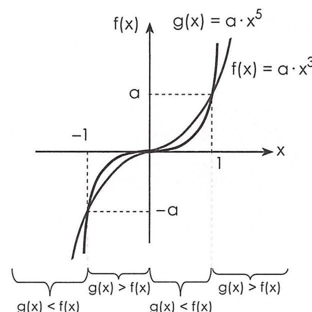
La función potencia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de la forma $f(x) = a \cdot x^n$, donde a es un número real, distinto de 0, y n es un número natural distinto de 1. La función potencia esta definida para los números reales y su gráfica depende del exponente.

i. Exponente par



Dom: $\mathbb{R}$ Rec: Dependerá del signo de a

ii. Exponente impar

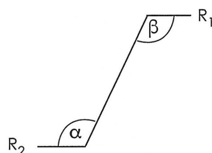


Dom: $\mathbb{R}$ Rec: $\mathbb{R}$

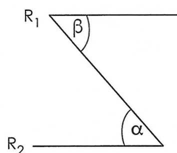
22. ÁNGULOS

i. Ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal - Casos Frecuentes

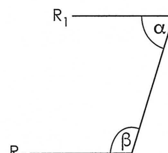
Si R_1 // R_2, entonces se cumple:



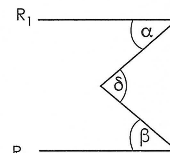
$\alpha = \beta$



$\alpha = \beta$



$\alpha + \beta = 180°$



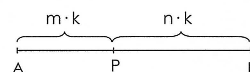
$\alpha + \beta = \delta$

23. DIVISIÓN DE TRAZOS

División interna

Si un punto P divide al trazo AB en la razón m : n , entonces se cumple:

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$



24. TRIÁNGULOS

En los triángulos siempre se cumplen las siguientes propiedades:

- Suma de las medidas de los ángulos interiores es igual a 180°.

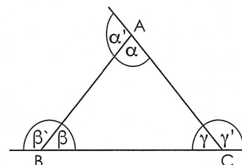
  $$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

- Suma de las medidas de los ángulos exteriores es igual a 360°.

  $$\alpha` + \beta` + \gamma` = 360°$$

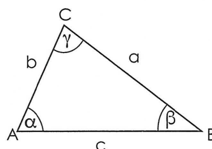
- La medida de cada ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

  $$\alpha` = \beta + \gamma \qquad \beta` = \gamma + \alpha \qquad \gamma` = \alpha + \beta$$



a. Clasificación de los triángulos según sus lados

Triángulo escaleno

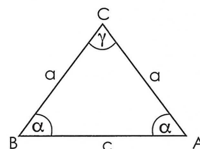


Tiene sus tres lados y sus tres ángulos de distinta medida.

$$a \neq b \neq c$$

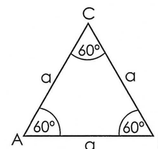
$$\alpha \neq \beta \neq \gamma$$

Triángulo isósceles



Tiene dos lados y dos ángulos de igual medida. El lado distinto se llama base. De la figura: el Δ ABC es isósceles de base $\overline{AB}$ o bien se puede decir que es isósceles en C.

Triángulo equilátero



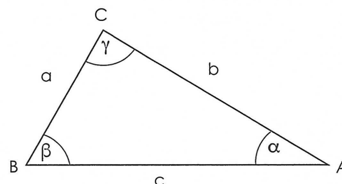
Tiene sus tres lados y sus tres ángulos de igual medida.

Cada ángulo interior mide 60°.

b. Otras relaciones en triángulos

i. Relación entre los lados

En todo triángulo, la medida de cada lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que la diferencia (positiva) de las medidas de los otros dos. En la figura adjunta, se debe cumplir:



$$|c - b| < a < b + c$$
$$|c - a| < b < a + c$$
$$|a - b| < c < a + b$$

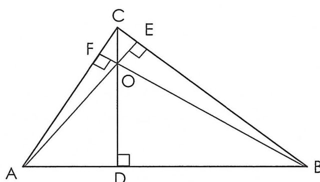
ii. Relación entre los ángulos

En todo triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado y viceversa. En la figura adjunta:

Si, $a < b < c$, entonces debe cumplir , $\alpha < \beta < \gamma$

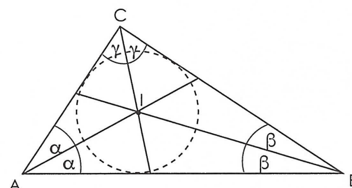
25. ELEMENTOS SECUNDARIOS DEL TRIÁNGULO

i. Altura



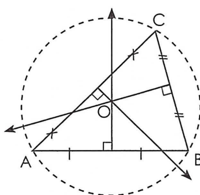
El punto de intersección de las alturas se llama **ortocentro**.

ii. Bisectriz



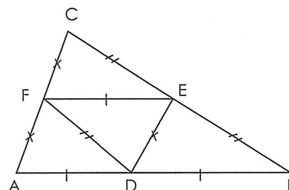
El punto de intersección de las bisectrices se llama **incentro** y este corresponde al centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.

iii. Simetral



El punto de intersección de las simetrales se llama **circuncentro** y este corresponde al centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

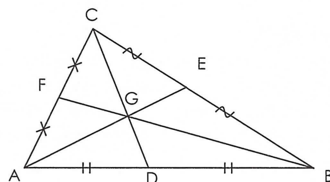
iv. Mediana



- La mediana es el segmento que une los puntos medios de los lados del triángulo.
- Las medianas son siempre paralelas al lado opuesto y además miden la mitad del lado al cual son paralelas.
- Las medianas dividen al triángulo en cuatro triángulos congruentes, cada uno de ellos semejante al triángulo mayor.

v. Transversal de gravedad

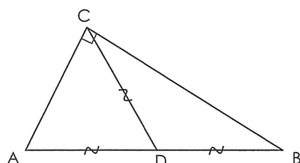
La transversal de gravedad es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las transversales se llama centro de gravedad.



Propiedades:

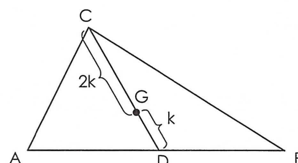
- Si Δ ABC es rectángulo en C, entonces:

  $\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{DB}$

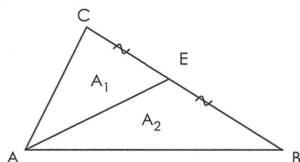


- El centro de gravedad divide a cada transversal en la razón 2: 1.

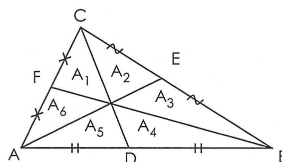
  Esto es, $\overline{CG} : \overline{GD} = 2 : 1$



- En todo triángulo, cada transversal de gravedad lo divide en dos triángulos equivalentes (igual área).

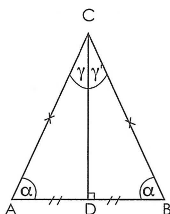


- Las tres transversales lo dividen en seis triángulos equivalentes (igual área).



vi. Teoremas referentes a un triángulo isósceles y equilátero.

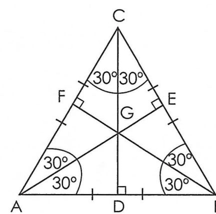
Triángulo Isósceles



Sea un triángulo isósceles de base $\overline{AB}$. Los elementos secundarios correspondientes coinciden con respecto al lado distinto o base.

$\overline{CD} = h_c = t_c = b_c = s_c$

Triángulo Equilátero



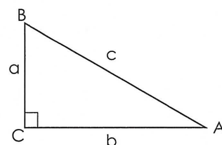
En un triángulo equilátero coinciden TODOS los elementos secundarios correspondientes a cualquier lado. Además, coinciden los puntos singulares o puntos de intersección.

26. PITÁGORAS Y EUCLIDES

a. Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, se cumple que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre su hipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



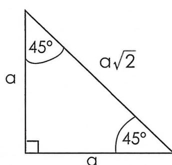
i. Tríos Pitagóricos

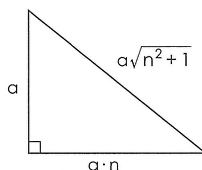
La tabla adjunta muestra los tríos pitagóricos más utilizados.

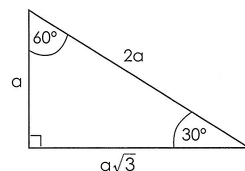
Otros tríos pitagóricos pueden surgir de la amplificación de tríos base, como por ejemplo el trío: 6 , 8 , 10, surge de la amplificación por 2 del trío: 3 , 4 , 5

Cateto	Cateto	Hipotenusa
3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29

ii. Triángulos Notables

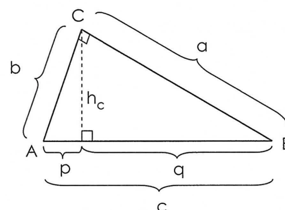






b. Teorema de Euclides

Si en un triángulo rectángulo (Δ ABC rectángulo en C), se dibuja una altura desde el ángulo recto, ésta divide a la hipotenusa en dos proyecciones (p y q: proyecciones de los catetos a y b, respectivamente), entonces se producen las siguientes relaciones:



- ▹ Fórmulas referentes a la altura

$$h_c^2 = p \cdot q \qquad h_c = \frac{a \cdot b}{c}$$

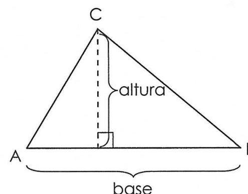
- ▹ Fórmulas referente a los catetos

$$a^2 = q \cdot c \qquad b^2 = p \cdot c$$

27. ÁREAS Y PERÍMETROS EN TRIÁNGULOS

i. Área: $A_{\blacktriangle} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

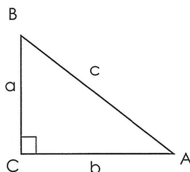
ii. Perímetro: $P_{\blacktriangle} = \text{lado} + \text{lado} + \text{lado}$



iii. Cálculo de áreas - Casos frecuentes

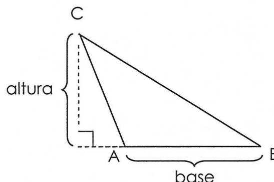
▹ Triángulo rectángulo

$$A_{\blacktriangle} = \frac{\text{cateto} \cdot \text{cateto}}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$



▹ Triángulo obtusángulo

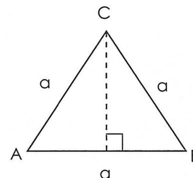
$$A_{\blacktriangle} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$



▹ Triángulo equilátero

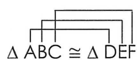
$$A_{\blacktriangle E} = \frac{(\text{lado})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h_{\blacktriangle E} = \frac{(\text{lado})\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

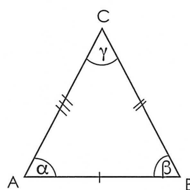


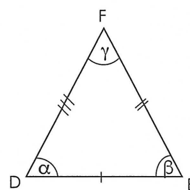
28. CONGRUENCIA

Dos o más figuras son congruentes (≅) si se cumple que son exactamente iguales tanto en forma como en tamaño.



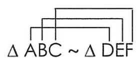
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ $\overline{CA} \cong \overline{FD}$





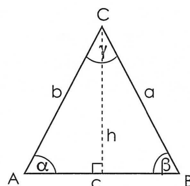
29. SEMEJANZA

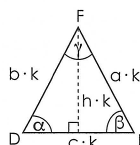
Dos o más figuras son semejantes (~) si tienen igual forma pero no necesariamente el mismo tamaño. Sus ángulos respectivos son congruentes y sus lados homólogos son proporcionales.



$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = k$ $\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = k$ $\frac{\overline{FD}}{\overline{CA}} = k$

(k : razón de semejanza)





a. Razón de semejanza

▹ Los segmentos homólogos están en la misma razón (k) que sus perímetros y elementos secundarios. De la figura, se cumple:

$$\frac{(\text{Perímetro } \Delta\, DEF)}{(\text{Perímetro } \Delta\, ABC)} = \frac{a \cdot k}{a} = \frac{b \cdot k}{b} = \frac{c \cdot k}{c} = \frac{h \cdot k}{h} = k$$

▹ Las áreas están en una razón equivalente al cuadrado de la razón (k^2). De la figura, se cumple:

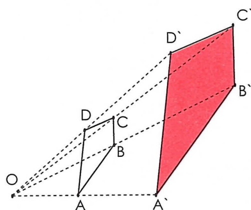
$$\frac{(\text{Área } \Delta\, DEF)}{(\text{Área } \Delta\, ABC)} = k^2$$

b. Homotecia

Una homotecia consiste en una ampliación o reducción, resultando una figura semejante a la original.

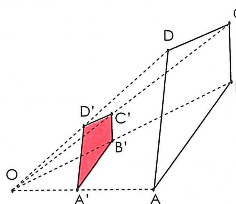
- Si **k > 1** , entonces La figura resultante es más grande que la original.

  $\overline{OA'} > \overline{OA} \longrightarrow \overline{A'B'} > \overline{AB}$



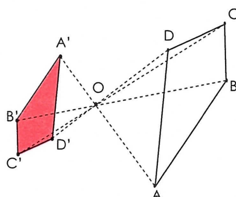
- Si **0 < k < 1** , la figura resultante es más pequeña que la original.

  $\overline{OA'} < \overline{OA} \longrightarrow \overline{A'B'} < \overline{AB}$



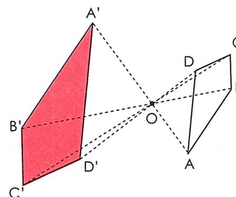
- Si **–1 < k < 0** , la figura resultante esta al otro lado del centro de homotecia y es más pequeña que la original.

  $\overline{OA'} > \overline{OA} \longrightarrow \overline{A'B'} > \overline{AB}$



- Si **k < –1** , la figura resultante esta al otro lado del centro de homotecia y es más grande que la original.

  $\overline{OA'} < \overline{OA} \longrightarrow \overline{A'B'} < \overline{AB}$



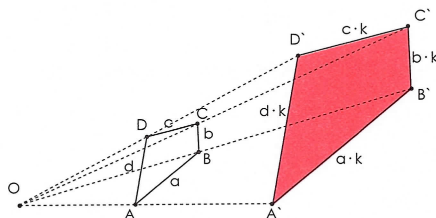
Gráficamente otras relaciones de la homotecia son:

$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot k \longrightarrow \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$

$\overline{B'C'} = \overline{BC} \cdot k \longrightarrow \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = k$

$\overline{C'D'} = \overline{CD} \cdot k \longrightarrow \dfrac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = k$

$\overline{D'A'} = \overline{DA} \cdot k \longrightarrow \dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = k$



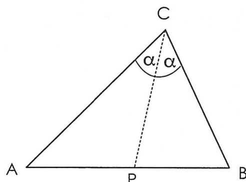
Propiedades

- Siempre se cumple que todos los puntos de la figura resultante están alineados con respecto a el centro de homotecia (O) y el punto correspondiente de la figura original.
- Una homotecia con razón –1 es igual que una rotación de 180° de la figura con respecto al centro de homotecia.
- En el caso de polígonos, la figura resultante tiene sus lados paralelos a la figura original.

30. PROPORCIÓN EN TRIÁNGULOS

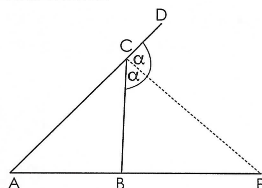
a. Teorema de la bisectriz

- Bisectriz interior



Si $\overline{CP}$ bisectriz de ∢ ACB , se cumple: $\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BP}$

- Bisectriz exterior

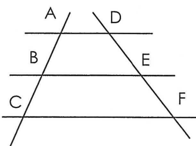


Si $\overline{CP}$ bisectriz de ∢ BCD , se cumple: $\frac{AC}{CB} = \frac{PA}{PB}$

b. Teorema de Thales

Caso 1:

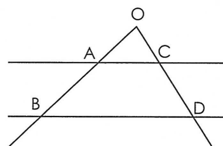
Si se cumple: $\overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF}$



Entonces: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{AC}{DF}$

Caso 2:

Si se cumple: $\overline{AC} \,//\, \overline{BD}$

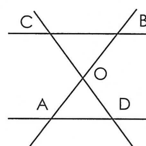


Entonces: $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$

$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$

Caso 3:

Si se cumple: $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$



Entonces: $\frac{CO}{OD} = \frac{BO}{OA} = \frac{BC}{AD}$

31. POLÍGONOS

i. Propiedades de polígonos de n lados

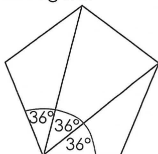
- **Suma de los ángulos interiores:** $180° \cdot (n - 2)$
- **Suma de ángulos exteriores:** $360°$
- **Diagonales desde un vértice:** $n - 3$
- **Total de diagonales:** $\frac{n(n-3)}{2}$

ii. Polígonos Regulares

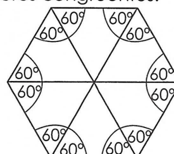
Son aquellos que tienen sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes.

IMPORTANTE:

- Al trazar las diagonales en cualquier polígono regular, éstas dividen al ángulo interior en partes iguales. Ejemplo: Pentágono regular



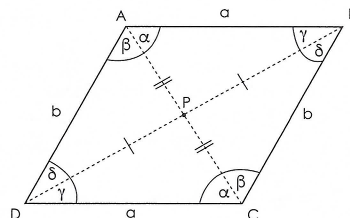
- En un hexágono regular, las diagonales son bisectrices de los ángulos interiores, y éstas dividen al hexágono en 6 triángulos equiláteros congruentes.





32. PARALELÓGRAMOS

a. Propiedades comunes



- Los ángulos opuestos son congruentes.

  $\sphericalangle A = \sphericalangle C \quad ; \quad \sphericalangle B = \sphericalangle D$

- Los ángulos consecutivos son suplementarios.

  $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$

  $\sphericalangle C + \sphericalangle D = \sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$

- Los lados opuestos son congruentes

  $\overline{AB} = \overline{CD} \quad ; \quad \overline{AD} = \overline{BC}$

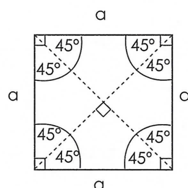
- Las diagonales de un paralelógramo se dimidian.

  $\overline{AP} = \overline{PC} \quad ; \quad \overline{BP} = \overline{PD}$

- Las diagonales lo dividen en 4 triángulos de igual área.

b. Clasificación de paralelogramos

i. Cuadrado



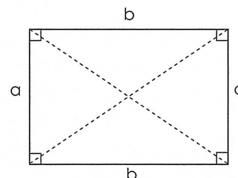
Características:

- Diagonales perpendiculares
- Diagonales bisectrices
- Diagonales de igual medida

Perímetro: $4 \cdot a$

Área: a^2 ó $\dfrac{(\text{Diagonal})^2}{2}$

ii. Rectángulo



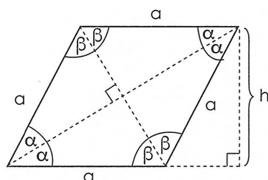
Características:

- Diagonales de igual medida

Perímetro: $2a + 2b$

Área: $a \cdot b$

iii. Rombo



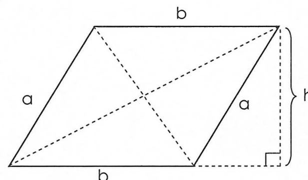
Características:

- Diagonales perpendiculares
- Diagonales bisectrices

Perímetro: $4 \cdot a$

Área: $a \cdot h$ ó $\dfrac{(\text{Diag } 1 \cdot \text{Diag } 2)}{2}$

iv. Romboide



Características:

- Solo las comunes a todo paralelógramo

Perímetro: $2a + 2b$

Área: $b \cdot h$

33. TRAPECIO

Trapecio es aquel cuadrilátero que tiene sólo un par de lados paralelos, llamados bases. Sus ángulos colaterales internos entre las bases son suplementarios. Es decir, en la figura:

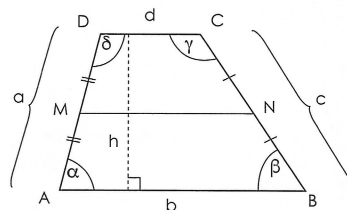
$$\alpha + \delta = 180° \quad ; \quad \beta + \gamma = 180°$$

La mediana ($\overline{MN}$) es la unión de los puntos medios de los lados no paralelos. Esta es paralela a las bases.

$\overline{AB} \mathbin{//} \overline{CD} \mathbin{//} \overline{MN}$; $\overline{AM} = \overline{MD}$ y $\overline{BN} = \overline{NC}$

La medida de la mediana corresponde al promedio de las bases.

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$



Perímetro: $a + b + c + d$

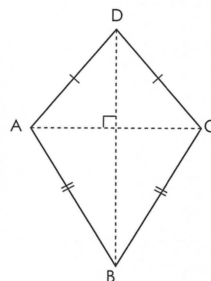
Área: $\overline{MN} \cdot h$

34. TRAPEZOIDE

Trapezoide es aquel cuadrilátero que no tiene par de lados paralelos. Los trapezoides se clasifican en asimétricos y simétricos.

Trapezoide simétrico (deltoide)

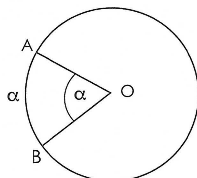
- Una de las diagonales cumple la función de base ($\overline{AC}$) y la otra diagonal cumple la función de eje de simetría ($\overline{BD}$).
- Las diagonales son perpendiculares entre sí ($\overline{AC} \perp \overline{BD}$)
- La diagonal, $\overline{BD}$, divide al deltoide en dos triángulos congruentes.
- La diagonal, $\overline{AC}$, divide al deltoide en dos triángulos isósceles, cada uno de base $\overline{AC}$.
- **Área deltoide:** $\dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$



35. CIRCUNFERENCIA

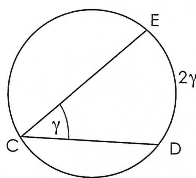
a. Ángulos en la Circunferencia

i. De centro



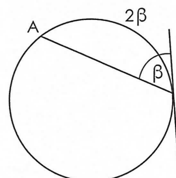
$\overset{\frown}{AB} = \alpha$

ii. Inscrito



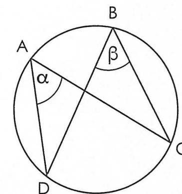
$\overset{\frown}{DE} = 2 \cdot \gamma$

iii. Semi-inscrito



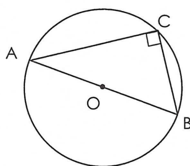
$\overset{\frown}{TA} = 2 \cdot \beta$

iv. Relación entre ángulos inscritos



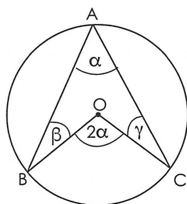
$\alpha = \beta$

v. Inscrito en una semi-circunferencia



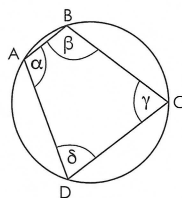
$\sphericalangle ACB = 90°$

vi. Relación entre ángulos inscritos y de centro



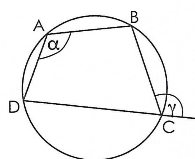
$\alpha = \beta + \gamma$

vii. Cuadrilátero inscrito



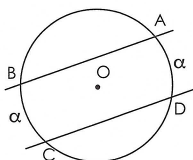
$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

viii. Exterior en un cuadrilátero



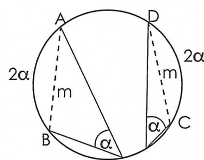
$\alpha = \gamma$

ix. Rectas paralelas



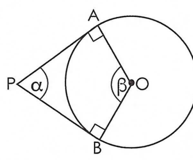
Si, $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, entonces, $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{BC}$

x. Cuerdas Iguales



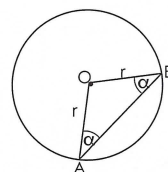
Si $\overline{AB} = \overline{CD} = m$, entonces, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 2\alpha$

xi. Tangentes desde un punto



$\alpha + \beta = 180°$

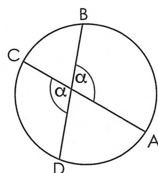
xii. Triángulo isósceles de radio r



$\sphericalangle BAO = \sphericalangle OBA$

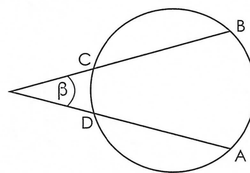
Δ ABO, isósceles de base $\overline{AB}$

xiii. Ángulo Interior



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

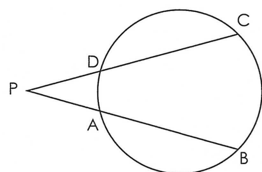
xiv. Ángulo Exterior



$$\beta = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

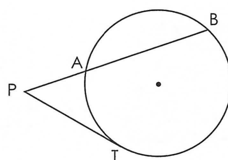
b. Proporciones en la Circunferencia

i. Teorema de las secantes



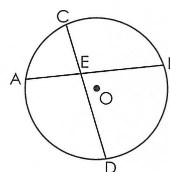
$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PC}$

ii. Teorema tangente-secante



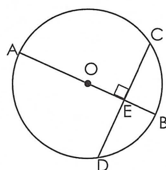
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

iii. Teorema de las cuerdas



$\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{ED}$

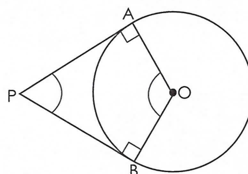
iv. Caso particular de las cuerdas



Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, entonces:

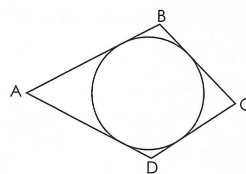
$\overline{CE} = \overline{DE}$, $\overline{CE}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{EB}$

v. Tangentes desde un punto



$\overline{PA} = \overline{PB}$

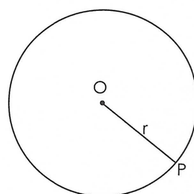
vi. Cuadrilátero circunscrito a una circunferencia



$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

c. Áreas y Perímetro

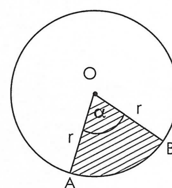
i. Círculo



Área: $A_{\odot} = \pi \cdot r^2$

Perímetro: $P_{\odot} = 2 \cdot \pi \cdot r$

ii. Sector circular



Área SC: $A_{S\odot} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$

Perímetro SC: $P_{S\odot} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} + 2r$

36. SISTEMA CARTESIANO

a. Distancia entre puntos, punto medio y pendiente

i. Distancia entre puntos

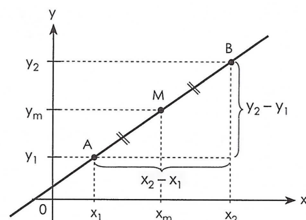
$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ii. Punto medio de un segmento

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \; y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

iii. Pendiente:

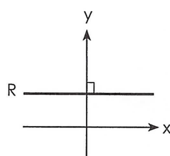
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



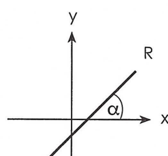
b. Relación entre el ángulo de inclinación y pendiente de la recta

Sea α el ángulo de inclinación y **m** la pendiente de la recta **R**. Entonces:

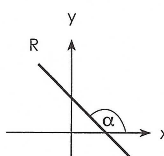
Si, $m = 0$ $\rightarrow \alpha = 0°$



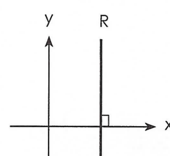
Si, $m > 0$ $\rightarrow 0° < \alpha < 90°$



Si, $m < 0$ $\rightarrow 90° < \alpha < 180°$



Si, $m = \infty$ $\rightarrow \alpha = 90°$

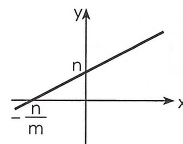


37. ECUACIÓN DE LA RECTA

Forma principal: $y = mx + n$

- **m**: Pendiente
- **n**: Coeficiente de posición. Valor donde la recta corta al eje y.
- $\frac{-n}{m}$: Valor donde la recta corta al eje x

Forma general: $ax + by = c$



a. Determinando la ecuación de la recta

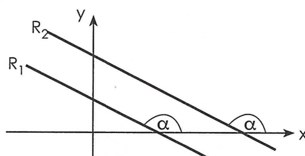
Para determinar la ecuación de la recta, dependiendo la información que nos den, podemos usar alguno de los siguientes métodos:

- Punto y pendiente : $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$
- Intersección ejes: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. (a: valor donde corta al eje x y b: valor donde corta al eje y).

b. Rectas paralelas y perpendiculares

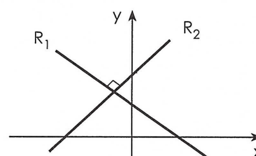
Sean R_1 y R_2 rectas de pendientes m_1, m_2 y coeficiente de posición n_1, n_2 respectivamente. Entonces:

- Rectas paralelas



$R_1 \parallel R_2$ si y solo si $m_1 = m_2$

- Rectas perpendiculares



$R_1 \perp R_2$ rectas de pendientes $m_1 \cdot m_2 = -1$

38. GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Medida de un segmento en el espacio

Sean los puntos A(a , b , c) y B(m , n , p).

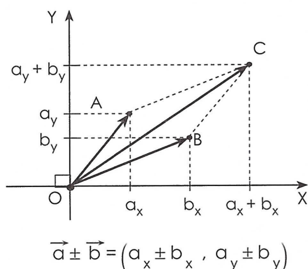
Para encontrar la distancia entre ellos, utilizamos la fórmula: $D = \sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2+(c-p)^2}$

39. VECTORES

a. Operatoria con vectores

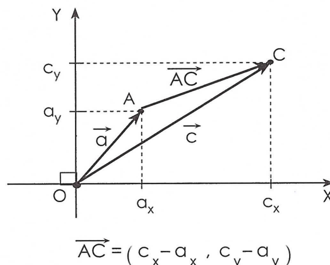
$\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ y $\vec{c} = (c_x, c_y)$, se cumple:

- Adición y sustracción



$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x \text{ , } a_y \pm b_y)$$

- Vectores no anclados en el origen



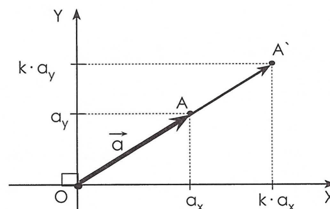
$$\overrightarrow{AC} = (c_x - a_x \text{ , } c_y - a_y)$$

- Ponderación por un escalar

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot (a_x, a_y) = (k \cdot a_x, k \cdot a_y)$$

El sentido y módulo varían de acuerdo al valor del escalar.

  - Si **k > 0,** se mantiene el sentido pero cambia la magnitud.
  - Si **k < 0,** cambia tanto la magnitud como el sentido del vector.



- Módulo o Magnitud de un vector

$$\|\vec{a}\| = |\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

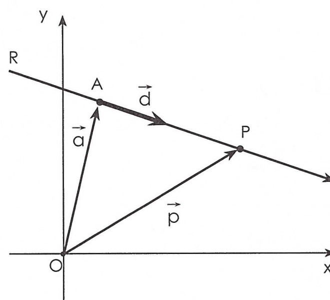
40. ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Supongamos una recta R que pasa por el punto A y O. Esta posee una dirección dada por el vector $\vec{d}$. Sean $\vec{a}$ y $\vec{p}$ los vectores de posición de los puntos respectivos. De la figura podemos observar que la suma de los vectores $\vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{p}$.

Del vector $\overrightarrow{AP}$, solo conoceremos su dirección (pendiente), ya que su magnitud variara infinitas veces, es por esto que el vector $\overrightarrow{AP}$ se representa como el vector dirección multiplicado por un escalar, el que comunmente se designa por la letra λ $(\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{d})$.

Ahora la suma anterior queda escrita como:

$$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} \quad \rightarrow \quad \vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{d}$$



i. Ecuación vectorial con coordenadas:

$$(x,y)=(a_x,a_y)+\lambda(d_x,d_y)$$

ii. Ecuación paramétrica:

$$x=a_x+\lambda d_x$$
$$y=a_y+\lambda d_y$$

iii. Ecuación simétrica de la recta:

$$\frac{x-a_x}{d_x}=\frac{y-a_y}{d_y}$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Si tenemos dos rectas escritas en forma vectorial: $R_1(\lambda)=\vec{p}+\lambda\cdot\vec{d}$ y $R_2(\lambda)=\vec{q}+\lambda\cdot\vec{s}$. Las las rectas $R_1(\lambda)$ y $R_2(\lambda)$ serán:

i. **Paralelas si:** $\vec{d}=k\cdot\vec{s}$, con $k\in\mathbb{R}-\{0\}$

ii. **Perpendiculares si:** $d_x\cdot s_x+d_y\cdot s_y=0$

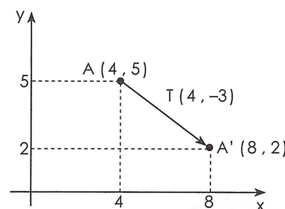
41. TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Las transformaciones isométricas son: **traslación**, **rotación**, **simetría central** y **simetría axial**.

a. Traslación

Para trasladar un punto o figura, se necesita un **vector traslación**. Para obtener la posición de un punto trasladado en el plano cartesiano, se debe sumar las coordenadas del punto inicial (x , y) más las coordenadas del vector traslación (u , v).

En caso de tener las coordenadas del punto inicial y final, y necesitar el vector traslación, este se encuentra restando las coordenadas del punto final menos el inicial, en ese orden. Ejemplo en la figura adjunta.



b. Rotación

Para rotar un punto o figura, se necesita un centro de rotación (punto en torno al cual se gira), un ángulo de rotación (indica cuánto se gira).

i. Rotaciones en torno al origen

Si rotamos el punto (x , y) con respecto al origen O(0 , 0) en un ángulo de giro de 90°, 180°, 270° ó 360°, las coordenadas de los puntos obtenidos están dados en la siguiente tabla:

Inicial	90°	180°	270°	360°
(x , y)	(–y , x)	(–x , –y)	(y , –x)	(x , y)

ii. Rotaciones en torno a un punto distinto al origen

En caso que el centro de rotación no sea el origen, el proceso para realizar la rotación es:

- 1ro, encontrar el vector traslación que lleva el centro de rotación (C) hacia el punto a rotar (A) (vector $\overrightarrow{CA}=\vec{A}-\vec{C}$).
- 2do, aplicar al vector resultante ($\overrightarrow{CA}$) la rotación requerida, utilizando la tabla anterior.
- 3ro, sumar al centro de rotación, el vector obtenido en el paso 2.

c. Simetrías central

En una simetría central, un punto o figura es reflejada con respecto a otro punto llamado centro de simetría. En una simetría central se cumple:

- Los trazos de la figura original son paralelos a los trazos homólogos de la figura transformada.
- Los puntos homólogos están a la misma distancia del centro de simetría.
- Una simetría respecto de un punto O equivale a una rotación en 180° de centro O.
- Todo punto del plano cartesiano (x , y) tiene su simétrico con respecto al origen al punto (–x , –y)

i. Figuras con centro de simetría

Se dice que una figura tiene centro de simetría, si existe un punto por el cual, si se rota la figura en 180°, la figura resultante coincide con la figura original. Ejemplo: Circulo, cuadrado, hexágono regular, etc.

d. Simetría axial

En una simetría axial, un punto o una figura es reflejada con respecto a una recta, llamada eje de simetría, formándose un efecto espejo. En una simetría axial se cumple:

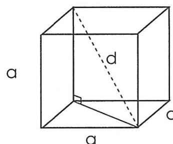
- Los puntos homólogos quedarán a la misma distancia del eje de simetría.
- El segmento que uno los puntos homólogos, es perpendicular al eje de simetría.
- Todo punto del plano cartesiano A(x , y) tiene un simétrico A'(x , –y) con respecto al eje de las abscisas (eje x) y un simétrico A''(–x , y) con respecto al eje de las ordenadas (eje y).

i. Figuras con eje de simetría

Podemos entender el eje de simetría en base a la siguiente idea: si doblamos una figura respecto a una línea, y las dos mitades coinciden, en ese caso esa línea corresponde al eje de simetría.

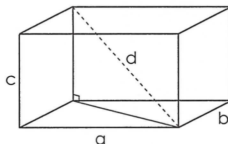
42. CUERPOS

i. Cubo



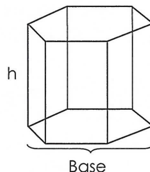
- **Área:** $6 \cdot a^2$
- **Volumen:** a^3
- **Diag. (d) :** $a \cdot \sqrt{3}$

ii. Paralelepípedo



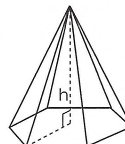
- **Área:** Suma de áreas laterales y basales
- **Volumen:** $(a \cdot b \cdot c)$
- **Diag:** $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

iii. Prisma



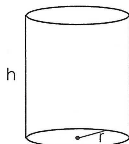
- **Área:** Suma de áreas laterales y basales
- **Volumen:** Área basal $\cdot$ h

iv. Pirámides



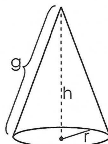
- **Área:** Suma de áreas laterales y basales
- **Volumen:** $\frac{1}{3} \cdot$ Área basal $\cdot$ h

v. Cilindros



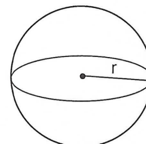
- **Área:** $2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
- **Volumen:** $\pi \cdot r^2 \cdot h$

vi. Conos



- **Generatriz:** $g = \sqrt{(r)^2 + (h)^2}$
- **Área:** $\pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$
- **Volumen:** $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

vii. Esferas



- **Área:** $4 \cdot \pi \cdot r^2$
- **Volumen:** $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

43. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central son indicadores que representan a una variable estadística. Éstas son **media aritmética** o promedio, **moda** y **mediana**.

a. MTC para datos sin agrupar

i. Media Aritmética:

La media aritmética o promedio es el cuociente entre la suma de todos los datos y el número de datos. Si se tienen n datos; x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n, su media aritmética es:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

ii. Moda:

Es el dato que más se repite. Un conjunto de datos puede tener una moda, más de una moda o puede no tener moda.

iii. Mediana:

La mediana de un conjunto de datos ordenados de menor a mayor, corresponde al dato que ocupa la posición central de los datos (para n impar) o el promedio entre los dos datos centrales (para n par).

b. MTC para datos en tabla sin intervalos

i. Media Aritmética:

Si se tienen n datos; x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n, y sus respectivas frecuencias f_1 , f_2 , f_3 , ... , f_n, entonces la media aritmética es:

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \ldots + x_n \cdot f_n}{n} \quad \text{para } n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$$

ii. Moda:

Corresponde al dato con mayor frecuencia.

iii. Mediana:

Para determinarla, se debe calcular el 50% de n o bien $\frac{n}{2}$. Si resulta un número decimal, se busca la posición correspondiente al número entero mayor más cercano. Si resulta un número entero, se promedia el dato que ocupa esa posición con el dato que ocupa la posición siguiente.

c. MTC para datos agrupados en tabla con intervalo

i. Media Aritmética:

Si se tienen las marcas de clase MC_1 , MC_2 , MC_3 , ... , MC_n, y sus respectivas frecuencias f_1 , f_2 , f_3 , ... , f_n, entonces la media aritmética es:

$$\overline{X} = \frac{MC_1 \cdot f_1 + MC_2 \cdot f_2 + MC_3 \cdot f_3 + \ldots + MC_n \cdot f_n}{n} \quad \text{para } n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$$

ii. Moda:

El intervalo modal corresponde al intervalo con mayor frecuencia.

Para determinar la moda, primero de debe identificar el intervalo modal y luego aplicar la fórmula:

$$\text{Moda} = L_i + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) \cdot A$$

$\mathbf{L_i}$ = límite inferior del intervalo modal

$\mathbf{D_1}$ = frecuencia del intervalo modal – frecuencia del intervalo anterior al modal

$\mathbf{D_2}$ = frecuencia del intervalo modal – frecuencia del intervalo posterior al modal

A = amplitud del intervalo modal

iii. Mediana:

El intervalo que contiene a la mediana corresponde al intervalo que contiene al dato en la posición $\frac{n}{2}$. Por lo tanto, para determinar este intervalo, se debe calcular $\frac{n}{2}$ y buscar el intervalo que tiene el dato que

ocupa esa posición, usando la Frecuencia acumulada. Si $\frac{n}{2}$ resulta un número decimal, este se aproxima al entero mayor más cercano.

Para determinar la mediana, primero de debe identificar el intervalo que contiene a la mediana y luego aplicar la fórmula:

$$\text{Mediana} = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{ant}}{f}\right) \cdot A$$

L_i = límite inferior del intervalo que contiene a la mediana

n = cantidad de datos (suma de las frecuencias)

F_{ant}= Frecuencia acumulada anterior al intervalo que contiene a la mediana

f = frecuencia del intervalo que contiene a la mediana

A = amplitud del intervalo que contiene a la mediana

44. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

i. Desviación estándar

Es una medida de dispersión y nos indica cuánto tienden a alejarse los datos del promedio aritmético.

Para calcular la desviación estándar (σ) se utilizan las siguientes fórmula:

- Para datos no agrupados:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

- Para datos en tabla sin intervalos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + f_n \cdot (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

- Para datos agrupados con intervalos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (MC_1 - \bar{x})^2 + f_2 \cdot (MC_2 - \bar{x})^2 + \ldots + f_n \cdot (MC_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Propiedades de la desviación estándar

Sea x una variable aleatoria y k un número real

- $\sigma(x) \geq 0$
- $\sigma(k) = 0$
- $\sigma(x + k) = \sigma(x)$
- $\sigma(kx) = k \cdot \sigma(x)$

ii. Varianza

Es otra medida de dispersión que corresponde al cuadrado de la desviación estándar. $\text{Var}(x) = \sigma^2$.
Sea x una variable aleatoria y k un número real, se cumple:

- $\text{Var}(x) \geq 0$
- $\text{Var}(k) = 0$
- $\text{Var}(x + k) = \text{Var}(x)$
- $\text{Var}(kx) = k^2 \cdot \text{Var}(x)$

45. MEDIDAS DE POSICIÓN

a. Percentiles

El percentil K de un conjunto de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el K% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el (100 – K)% de los valores son mayores o iguales a él. Es decir, el percentil K corresponde al dato que ocupa la posición $\frac{K \cdot n}{100}$, donde n es la cantidad de datos.

El percentil de orden K se denota por P_K

i. Percentiles para datos sin agrupar

Paso 1. Se ordenan los datos de menor a mayor

Paso 2. Se calcula la posición que ocupa el percentil, con la fórmula $\frac{K \cdot n}{100}$, en donde K = {1, 2, ..., 99} y depende del percentil a calcular, y n es el número de datos.

Paso 3. Se busca el dato P_k que ocupa la posición encontrada. Se tienen dos opciones:

- Si $\frac{K \cdot n}{100}$ resulta un número decimal: se busca el entero mayor más cercano y el dato en esa posición será P_k.
- Si $\frac{K \cdot n}{100}$ resulta un número entero: se promedia el dato en esa posición con el dato en la posición siguiente y ese resultado será P_k.

ii. Percentiles para datos en tabla sin intervalos

Paso 1. Se calcula la posición que ocupa el percentil, con la fórmula $\frac{K \cdot n}{100}$, en donde K = {1, 2, ..., 99} y depende del percentil a calcular, y n es el número de datos.

Paso 2. Se busca el dato P_k que ocupa la posición encontrada. Al igual que en datos no agrupados, se tienen dos opciones:

- Si $\frac{K \cdot n}{100}$ resulta un número decimal: se busca el entero mayor más cercano y esa será la posición del percentil buscado P_k. Para encontrar ese dato, usamos la Frecuencia acumulada como se muestra en el ejemplo.
- Si $\frac{K \cdot n}{100}$ resulta un número entero: se promedia el dato que ocupa esa posición con el dato que ocupa la posición siguiente. Para encontrar esos datos, se usa la Frecuencia acumulada como se muestra en el ejemplo.

i. Percentiles para datos agrupados en tabla con intervalo

El intervalo que contiene al percentil P_k corresponde al intervalo que contiene al dato en la posición $\frac{K \cdot n}{100}$. Por lo tanto, para determinar este intervalo, se debe calcular $\frac{K \cdot n}{100}$ y buscar el intervalo que tiene el dato que ocupa esa posición, usando la Frecuencia acumulada. Si $\frac{K \cdot n}{100}$ resulta un número decimal, este se aproxima al entero mayor más cercano.

Para calcular un percentil P_k se debe determinar el intervalo que contiene al percentil P_k para puego aplicar la fómula:

$$P_K = L_i + \left(\frac{\frac{K \cdot n}{100} - F_{ant}}{f} \right) \cdot A$$

L_i = límite inferior del intervalo que contiene al percentil **P_k**

K = valor asociado al percentil buscado P_k

n = cantidad de datos (suma de las frecuencias)

F_{ant}= Frecuencia acumulada anterior al intervalo que contiene al percentil P_k

1f = frecuencia del intervalo que contiene al percentil P_k

A = amplitud del intervalo que contiene al percentil P_k

b. Cuartiles

Son los tres valores que dividen a un conjunto ordenado de datos en cuatro partes iguales: cuartil 1, cuartil 2 y cuartil 3 (Q_1, Q_2 y Q_3) determinan los valores correspondientes al 25%, 50% y 75% de los datos, respectivamente.

- Cuartil 1 = Percentil 25
- Cuartil 2 = Percentil 50 = Mediana
- Cuartil 3 = Percentil 75

c. Deciles

Son los 9 valores que dividen a un conjunto ordenado de datos en diez partes iguales. Decil 1, Decil 2, Decil 3, ... Decil 9 (D_1, D_2 , D_3, ..., D_9) determinan los valores correspondientes al 10%, 20% , 30, ... y 90% de los datos, respectivamente.

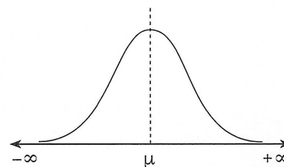
- Decil 1 = Percentil 10
- Decil 2 = Percentil 20
- Decil 3 = Percentil 30

...

- Decil 9 = Percentil 90

46. DISTRIBUCIÓN NORMAL

El gráfico de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal recibe el nombre de campana de Gauss, en la figura adjunta. La distribución queda definida por dos parámetros: la media (μ) y la varianza (σ^2), y se denota $X \sim N(\mu ; \sigma^2)$. Recordar que para obtener la desviación estándar σ se debe aplicar raíz cuadrada a la varianza σ^2.



ii. Propiedades de la distribución Normal

- El área bajo la curva es igual a 1.
- Es simétrica con respecto a $x = \mu$. La función queda dividida en dos con una probabilidad del 50% de observar un dato mayor a la media y un 50% de observar un dato menor a la media.
- Tiene asíntotas en el eje horizontal.
- La media, moda y mediana coinciden.

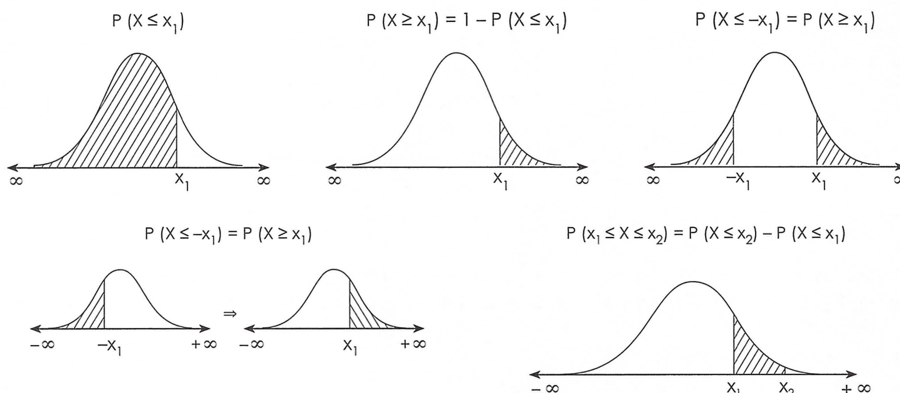
a. Distribución normal estándar

La **distribución normal estándar** es aquella que tiene media 0 y desviación estándar 1. $X \sim N(0 ; 1)$

Para calcular la probabilidad en distribuciones normales podemos usar tablas que presentan las áreas bajo las curvas y que permiten determinar la probabilidad en ese intervalo. Para efectos de este texto y de la PSU ocuparemos la tabla con las probabilidades más utilizadas. La tabla a utilizar es:

z	0,67	0,99	1,00	1,15	1,28	1,64	1,96	2,00	2,17	2,32	2,58
$P(Z \leq z)$	0,749	0,839	0,841	0,875	0,900	0,950	0,975	0,977	0,985	0,990	0,995

i. Propiedades



ii. Estandarizar

Para calcular probabilidades asociadas a variables que distribuyen normal $N(\mu , \sigma^2)$, se debe estandarizar (tipificar o normalizar) los datos para que la variable distribuya normal estándar $N(0 , 1)$. Para esto, a nuestra variable X le restamos la media y luego dividimos por la desviación estándar (raíz cuadrada de la varianza), obteniendo una nueva variable Z. Esto es: $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

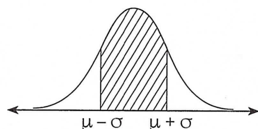
Entonces, la probabilidad en términos de la variable X puede calcularse en términos de Z, utilizando las tablas de distribución estándar, es decir:

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$



iii. Intervalos de una distribución normal

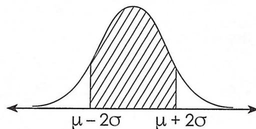
Intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$



El área bajo la curva es 0,6826 es decir, 68,26% del total.

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}6826$

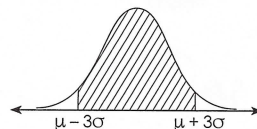
Intervalo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$



El área bajo la curva es 0,9544 es decir, 95,44% del total.

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}9544$

Intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$



El área bajo la curva es 0,9973 es decir, 99,73% del total.

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}9973$

47. INTERVALOS DE CONFIANZA

Un intervalo de confianza es un rango de valores que probablemente contiene el valor del parámetro que se quiere estimar (típicamente la media poblacional), dada cierta probabilidad de éxito.

El **nivel de confianza** es la probabilidad de que el intervalo calculado contenga al verdadero valor del parámetro y se determina por $(1 - \alpha)$, siendo α el nivel de significación. Los niveles de confianza más usuales son: 90%, 95% y 99%, que corresponden a niveles de significación de 10%, 5% y 1%, respectivamente.

Los **limites de confiabilidad** son los valores que establecen los límites del intervalo de confianza.

Así, para determinar un intervalo de confianza para la media poblacional μ, esta debe seguir una distribución normal con σ conocida . Debemos conocer también la media muestral $\overline{X}$, es decir el promedio de una muestra de tamaño n.

Con un nivel de confianza de $(1 - \alpha)$ y con σ conocida, el intervalo se calcula como:

$$IC: \left[\overline{X} - Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

μ : media de la población

σ : desviación estándar de la población

$\overline{X}$: Media de la muestra

n : tamaño de la muestra

El margen de error es: $Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La siguiente tabla muestra los valores de $Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ más comunes según el nivel de confianza.

Nivel de confianza	90%	95%	99%
$Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$	1,64	1,96	2,58

48. MUESTREO

a. Número de muestras que se pueden extraer de una población

Dada una población de n elementos, se puede determinar la cantidad de muestras de tamaño r que se pueden extraer, dependiendo de las características de dicha extracción:

i. Con reposición

Para determinar el número de muestras de un tamaño dado (r) que se pueden extraer de una población finita de tamaño (n) con reposición: $CR_r^n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!}$

ii. Sin reposición y sin orden

Para determinar el número de muestras de un tamaño dado (r) que se pueden extraer de una población finita de tamaño (n) sin reposición y sin orden: $C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

iii. Sin reposición y con orden

Para determinar el número de muestras de un tamaño dado (r) que se pueden extraer de una población finita de tamaño (n) sin reposición y con orden: $V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

b. Relación entre la media poblacional y la media muestral

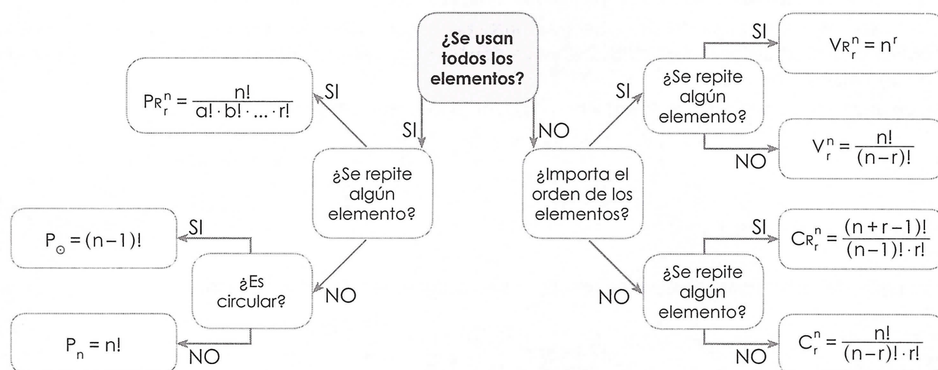
El promedio del promedio de todas las muestras de igual tamaño extraídas desde una población, es igual al promedio de todos los datos de dicha población.

c. Distribución de medias muestrales

Entonces, las medias muestrales o promedios de todas las muestras de tamaño n que se pueden extraer de una población con media μ y desviación estándar σ, tienen una distribución normal, con media μ, varianza igual a $\frac{\sigma^2}{n}$ y desviación estándar igual a $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\text{Medias muestrales} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

49. PERMUTACIÓN, VARIACIÓN Y COMBINACIÓN



50. PROBABILIDADES

a. Probabilidad clásica o regla de Laplace

En un experimento aleatorio, la probabilidad de un suceso A se obtiene dividiendo el número de casos favorables al evento A por el número total de casos posibles (espacio muestral).

$$P(A) = \frac{\text{N° de casos favorables (A)}}{\text{N° total de casos}}$$

NOTA:

- En el lanzamiento de n monedas, la cantidad de casos totales del experimento es 2^n
- En el lanzamiento de n dados, la cantidad de casos totales del experimento es 6^n

i. Triángulo de pascal

El triángulo de Pascal se utiliza en experimentos aleatorios que tengan dos sucesos equiprobables de ocurrencia, como por ejemplo: lanzar una moneda, el sexo de una persona, respuestas de preguntas del tipo Cara o Sello, etc. Gráficamente se muestra en la figura siguiente:

					$1C^1$		$1S^1$				= 2
				$1C^2$		$2\,C^1S^1$		$1S^2$			= 4
			$1C^3$		$3\,C^2S^1$		$3\,C^1S^2$		$1S^3$		= 8
		$1C^4$		$4\,C^3S^1$		$6\,C^2S^2$		$4\,C^1S^3$		$1S^4$	= 16
	$1C^5$		$5\,C^4S^1$		$10\,C^3S^2$		$10\,C^2S^3$		$5\,C^1S^4$	$1S^5$	= 32

- Los coeficientes primero y último de cada fila son siempre 1
- Cualquier otro coeficiente de una fila se obtiene como la suma de los dos valores que están justo arriba en la fila anterior.

b. Suma de probabilidades

Para aprender la suma de probabilidades, se debe manejar el concepto de eventos mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes:

i. Mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** si ellos no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir no tienen elementos comunes.

Sean A y B, dos eventos **excluyentes** de un espacio muestral E. La probabilidad de que ocurra A o B está dada por:

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ii. No mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son **no mutuamente excluyentes** si ellos pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir tienen elementos comunes.

Sean A y B, dos eventos **no excluyentes** de un espacio muestral E. La probabilidad de que ocurra A o B está dada por:

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{probabilidad que ocurra lo común entre A y B}}$$

c. Producto de probabilidades y probabilidad condicional

Para aprender el producto de probabilidades, se debe manejar el concepto de eventos dependientes e independientes:

i. Eventos independientes

Dos eventos A y B son **independientes** si la ocurrencia de uno no influye sobre la ocurrencia del otro.

Sean A y B, dos **eventos independientes** de un espacio muestral E. La probabilidad de que ocurra A y B está dada por:

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

i. Eventos dependientes

Dos eventos A y B son **dependientes** si la ocurrencia de uno influye sobre la ocurrencia del otro, modificando el espacio muestral.

Sean A y B, dos **eventos dependientes**, la probabilidad de que ocurra A y B está dada por:

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Es decir, la probabilidad que ocurra A y B es igual a la probabilidad que ocurra A multiplicada por la probabilidad que ocurra B asumiendo que A ocurrió anteriormente.

Se habla de P(B/A) como **probabilidad condicional,** ya que es la probabilidad de B, con la condición de que A ya ocurrió.

Esta fórmula también se puede expresar como:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

51. VARIABLE ALEATORIA Y FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Una variable aleatoria es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Se llama función de probabilidad **f(x)**, de una variable aleatoria discreta "X" a la función que asocia a cada valor de x_i de la variable, su probabilidad $P(X = x_i)$.

Esto quiere decir que $\mathbf{f(x)} = P(X = x_i)$

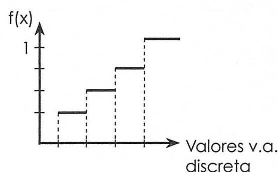
- Dominio de la Variable aleatoria: Espacio muestral
- Recorrido de la Variable aleatoria = Dominio de la función probabilidad: Conjunto formado con todos los valores que puede tomar la variable aleatoria.
- Recorrido de la función probabilidad: Conjunto formado por los resultados de cada probabilidad.

a. Función de distribución de probabilidad acumulada

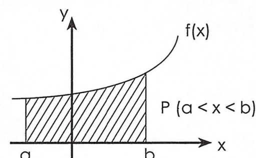
La función de distribución de probabilidad acumulada, **F(x)**, asocia a cada valor de x la probabilidad acumulada, es decir $F(x) = P(X \leq x)$

i. Gráfico

En el caso de variable aleatoria discreta la función de distribución de probabilidad es una función escalonada, donde el máximo valor que toma F(x) = 1



En el caso de variable aleatoria continua la función de distribución de probabilidad es una función continua, y la probabilidad de que la variable esté comprendida en el intervalo [a , b] está dada por el área bajo la curva de la función entre los puntos a y b.



ii. Propiedades

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- Si a < b, entonces $P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

52. ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

La esperanza de una variable aleatoria discreta **E(x)**, o valor esperado, se determina por la suma de los productos de la probabilidad de cada suceso por el valor de dicho evento. Si x_i corresponden a los valores que toma la variable aleatoria X y $P(X = x_i)$ su probabilidad de ocurrencia, entonces:

$$E(x) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Aplicaciones de la esperanza en juegos de azar

- Si $E(X) = 0$ el juego es equitativo, es decir se considera justo
- Si $E(X) > 0$ el juego se considera favorable
- Si $E(X) < 0$ el juego se considera injusto.

53. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La distribución binomial, es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta definida, donde X es la cantidad de éxitos observados, n es la cantidad de intentos, cada uno con probabilidad p de éxito, su notación es: $X \sim B(n, p)$.

a. Función de probabilidad binomial

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x} \qquad \text{Recordar que: } \binom{n}{x} = C^{n}_{x} = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!}$$

b. Función de distribución acumulada de la distribución binomial

$$P(X \le xi) = \binom{n}{0} \cdot p^{0} \cdot (1-p)^{n-0} + \binom{n}{1} \cdot p^{1} \cdot (1-p)^{n-1} + \dots + \binom{n}{x_i} \cdot p^{xi} \cdot (1-p)^{n-xi}$$

c. Esperanza y varianza de la distribución binomial

$$E(X) = n \cdot p \quad ; \quad Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

d. Aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal

Si se tiene una distribución binomial, ésta se puede aproximar a una normal con media: $\mu = np$ y varianza: $\sigma^2 = np(1-p)$

$$B(n, p) \longrightarrow N(np\ ,\ np(1-p))$$

Obs: Se considera que la aproximación es buena cuando $n \cdot p \ge 5$ y $n \cdot (1-p) \ge 5$

RESUMEN MATEMÁTICA

CUADERNO RESUMEN DE CONTENIDOS PSU MATEMÁTICA

© Inscripción N° 275.203
Derechos reservados
Noviembre 2015
I.S.B.N 978-956-7275-05-2
Cuarta edición
Noviembre 2018

AUTORES | Javiera Carlevarino - Andrés Mardones
DIRECTOR EDITORIAL | Andrés Mardones Molina
DISEÑADORES | Valentina Saba Gidi - Jorge Vergara
Bárbara Meza
DISEÑOS | Freepik

Portadas: Couche 350 grs
Páginas: 42 pág. Papel Bond 70 grs.
Tamaño: 16,5 x 21,5 cm
Peso: 0,2Kg. aprox.

**Material protegido bajo derecho de autor.
Prohibida su reproducción parcial o total
sin el consentimiento explícito de Editorial Moraleja.**

RESUMEN MATEMÁTICA

CUADERNO RESUMEN DE CONTENIDOS PSU MATEMATICA

Este cuadernillo resume los contenidos asociados al texto "Matemática Para Nacional", Cuarta edición.
El objetivo es que el alumno tenga de manera ordenada las fórmulas y procedimientos más utilizados para la resolución de ejercicios.









Síguenos en ed.moraleja

